KANTONALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE
I RAZRED

Srednjobosanski kanton, školska 2013/14. godina

1. Naći minimalnu vrijednost izraza $A = |x+1| + |x-2| + |x-3|$, $x \in \mathbb{R}$.
2. Ako je $3x^2 + x = 1$, izračunati vrijednost izraza $6x^3 - x^2 - 3x + 2014$.
3. U rombu $ABCD$ sa uglom od 60^0 kod vrha A, na stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ date su tačke M i N, takve da je zbir duži $\overline{AM} + \overline{NC}$ jednak stranici romba. Dokazati da je trougao MND jednakostranični.
4. Ako su a i b dužine kateta, c je dužina hipotenuze, a h je dužina visine na hipotenuzu u pravouglom trouglu, dokazati da je $c + h > a + b$.

Zabranjena upotreba kalkulatora.

SRETNO!

Rješenja zadataka za I razred

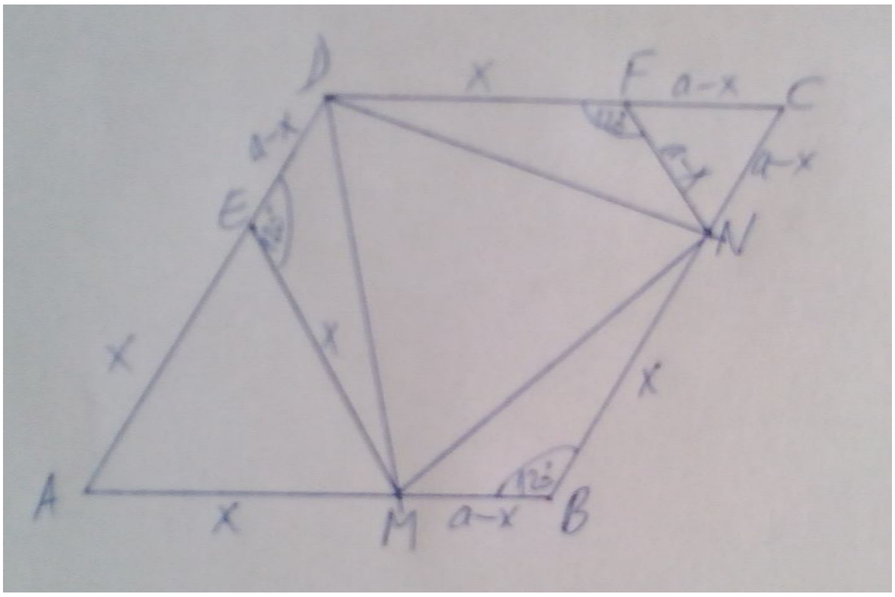
1. Razlikujemo nekoliko slučajeva.
   - Ako je $x \le -1,$ tada je $A = -(x+1)-(x-2)-(x-3) = -3x+4.$ Zatim, $x \le -1 \Rightarrow -3x \ge 3 \Rightarrow A \ge 7.$
   - Ako je $-1 < x \le 2,\ A = x+1-(x-2)-(x-3) = 6-x \ge 6-2 = 4.$
   - Ako je $2 < x \le 3,\ A = x+1+x-2-(x-3) = x+2 > 4.$
   - Ako je $x > 3, A = x+1+x-2+x-3 = 3x-4 > 5.$

   Iz svega zaključujemo da je najmanja vrijednost datog izraza 4.

2. Pomoću dijeljenja polinoma (ili nekom drugom transformacijom) lako se dobije da je $6x^3 - x^2 - 3x = \underbrace{(3x^2+x)}_{1}(2x-1) - 2x = 2x-1-2x = -1,$ dakle

   $6x^3 - x^2 - 3x + 2014 = 2013.$

3. Na duži $\overline{AD}$ uočimo tačku E tako da je $\overline{AM} = \overline{AE},$ a na duži $\overline{CD}$ neka je tačka F tako da je $\overline{CN} = \overline{CF}.$ Tada su trouglovi AME i NCF jednakostranični i očigledno su podudarni trouglovi MBN, DNF i DEM. Otuda slijedi da je $\overline{MN} = \overline{ND} = \overline{DM}.$



4. Pošto je $\frac{ab}{2} = \frac{ch}{2}$ (površina trougla), imamo da je $ab = ch \Rightarrow h = \frac{ab}{c}$. Tada je

$$c + h > a + b \Leftrightarrow c + \frac{ab}{c} > a + b \Leftrightarrow c^2 + ab > ac + bc \Leftrightarrow c^2 + ab - ac - bc > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c(c-b) - a(c-b) > 0 \Leftrightarrow (c-a)(c-b) > 0.$$

Zadnja nejednakost je očigledno tačna jer je $c > a$ i $c > b$.

KANTONALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE
II RAZRED

Srednjobosanski kanton, školska 2013/14. godina

1. Uporediti brojeve $x=\sqrt{2012}+\sqrt{2013}$ i $y=\sqrt{2011}+\sqrt{2014}$.
2. U pravougli trougao sa katetama $a=6,\ b=8$ upisan je pravougaonik tako da mu jedna stranica leži na hipotenuzi, a preostala dva vrha su mu na katetama trougla. Odrediti ivice pravougaonika, ako se zna da on ima maksimalnu površinu.
3. Naći sve trojke cijelih brojeva (a,b,c) tako da je $3(a-3)^2+6b^2+2c^2+3b^2c^2=33$.
4. Dokazati da je $\left(\frac{\sqrt{3}+5i}{4+2i\sqrt{3}}\right)^{66}$ cijeli broj (*i* je imaginarna jedinica).

Zabranjena upotreba kalkulatora.

SRETNO!

Rješenja zadataka za II razred

1. Neka je $a = 2012,5$. Tada je $x = \sqrt{a+0,5} + \sqrt{a-0,5}$ i $y = \sqrt{a+1,5} + \sqrt{a-1,5}$.

Otuda slijedi da je

$x^2 = a + 0,5 + 2\sqrt{a^2 - 0,25} + a - 0,5 = 2a + 2\sqrt{a^2 - 0,25}$, dok je
$y^2 = a + 1,5 + 2\sqrt{a^2 - 2,25} + a - 1,5 = 2a + 2\sqrt{a^2 - 2,25}$.

Pošto je $-0,25 > -2,25 \Rightarrow a^2 - 0,25 > a^2 - 2,25 \Rightarrow x^2 > y^2$, dakle $x > y$.

2. Neka je *x* dužina stranice pravougaonika koja leži na hipotenuzi *c*, a *y* druga stranica. Najprije odredimo dužinu hipotenuze datog trougla pomoću Pitagorine teoreme $c = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$.

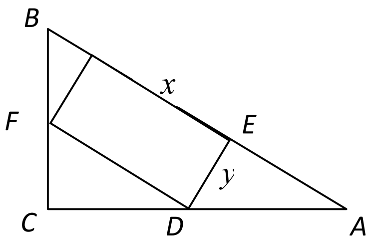
Posmatrajmo trouglove ABC, CDF, AED. Oni su međusobno slični.

Iz sličnosti trouglova imamo:

$x : \overline{CD} = 10 : 8 \Rightarrow \overline{CD} = \frac{4}{5}x$ i

$y : (8 - \overline{CD}) = 6 : 10 \Rightarrow y = \frac{3}{5}(8 - \overline{CD}) = \frac{3}{5}(8 - \frac{4}{5}x) = \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5}(10 - x) = \frac{12}{25}(10 - x)$.

Površina upisanog pravougaonika je onda jednaka



$$P = \frac{12}{25}x\left(10 - x\right) = -\frac{12}{25}x^2 + \frac{24}{5}x.$$

Ova površina je maksimalna ako je

$x = \dfrac{\frac{24}{5}}{2 \cdot \frac{12}{25}} = 5$, a otuda je $y = \frac{12}{5}$.

3. Očito je broj *c* djeljiv sa 3 i osim toga $2c^2 \le 33 \Rightarrow c^2 \le 17 \Rightarrow c = 0$ ili $c = \pm 3$.

Ako je $c = 0$, poslije skraćivanja jednačine sa 3, dobijamo da je $\left(a - 3\right)^2 + 2b^2 = 11$. To znači da je $2b^2 \le 11 \Rightarrow b^2 \le 5,5 \Rightarrow b \in \left\{0, \pm 1, \pm 2\right\}$.

Ako je $b=0,$ tada je $(a-3)^2=11.$ Ova jednačina nema cjelobronih rješenja po *a*.

Ako je $b=\pm1,$ tada je $(a-3)^2=9 \Rightarrow a=0$ ili $a=6.$

Time imamo rješenja: $(6,1,0),(6,-1,0),(0,1,0),(0,-1,0).$

Ako je $b=\pm2,$ dobije se $(a-3)^2=3.$ Ova jednačina nema cjelobronih rješenja po *a*. Time smo iscrpili sve slučajeve po nepoznatim *a* i *b* kad je $c=0.$

Najzad, ako je $c=\pm3,$ poslije skraćivanja jednačine sa 3, dobijemo jednačinu $(a-3)^2+11b^2=5.$ Ona je moguća samo ako je $b=0 \Rightarrow (a-3)^2=5,$ a ova jednačina nema cjelobronih rješenja po *a*.

Dakle, sva rješenja date jednačine su trojke $(6,1,0),(6,-1,0),(0,1,0),(0,-1,0).$

4. Pošto je

$$\frac{\sqrt{3}+5i}{4+2i\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}+5i}{4+2i\sqrt{3}}\cdot\frac{4-2i\sqrt{3}}{4-2i\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}-6i+20i+10\sqrt{3}}{16+\left(2\sqrt{3}\right)^2}=\frac{14\left(\sqrt{3}+i\right)}{28}=\frac{\sqrt{3}+i}{2},$$

slijedi da je

$$\left(\frac{\sqrt{3}+5i}{4+2i\sqrt{3}}\right)^{66}=\left[\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^3\right]^{22}=\left(\frac{3\sqrt{3}+9i+3\sqrt{3}i^2+i^3}{8}\right)^{22}=\left(\frac{8i}{8}\right)^{22}=i^{22}=i^{20}\cdot i^2=-1.$$

KANTONALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE
III RAZRED

Srednjobosanski kanton, školska 2013/14. godina

1. Dokazati da je $\left(\sqrt{3}\right)^{\sin 40^0} \cdot 9^{\cos^2 35^0} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}\cos 40^0} = 3.$
2. Dužine stranica paralelograma su a i b, $a > b$, a jedan unutrašnji ugao je α. Izračunati površinu četverougla ograničenog simetralama unutrašnjih uglova paralelograma.
3. Date su tačke $A\left(-\frac{17}{2}, 0\right), B(2,0), C(-1,0)$. Na pravoj $y = x - 3$ naći sve tačke iz kojih se duži $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ vide pod istim uglom.
4. Soba ima oblik kocke čija je ivica dužine 3 m. U sobi se nalazi 136 muha. Dokazati da se u svakom trenutku bar 6 muha može obuhvatiti sferom poluprečnika 9 dm.

Zabranjena upotreba kalkulatora.

SRETNO!

Rješenja zadataka za III razred

1. $\left(\sqrt{3}\right)^{\sin 40^0} \cdot 9^{\cos^2 35^0} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}\cos 40^0} = 3^{\frac{1}{2}\sin 40^0 + 2\cos^2 35^0 - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 40^0} =$

$= 3^{\cos 60^0 \cdot \sin 40^0 + 1 + \cos 70^0 - \sin 60^0 \sin 40^0} = 3^{\sin\left(40^0 - 60^0\right) + 1 + \sin 20^0} = 3^{-\sin 20^0 + 1 + \sin 20^0} = 3.$

2. Dokažimo najprije da je četverougao ograničen simetralama unutrašnjih uglova paralelograma pravougaonik. Neka se simetrale paralelograma ABCD sijeku tako da određuju četverougao MNPQ. Ako je $\sphericalangle BAD = \alpha,$ tada je

$$\sphericalangle ABC = 180^0 - \alpha \Rightarrow \sphericalangle ABP = 90^0 - \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \sphericalangle APB = 90^0.$$

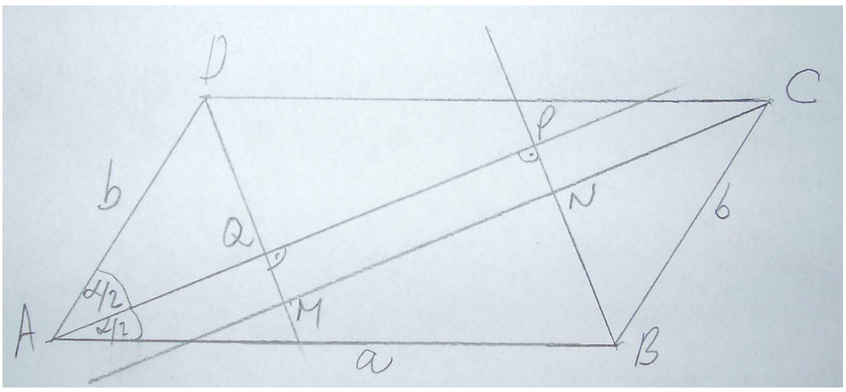
Analogno se dokaže i za ostale uglove četverougla MNPQ da su pravi.

Trougao AQD je pravougli. Zato je $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\overline{AQ}}{b} \Rightarrow \overline{AQ} = b\cos\frac{\alpha}{2}.$

Trougao APB je pravougli. Zato je $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\overline{AQ} + \overline{QP}}{a} \Rightarrow \overline{QP} = a\cos\frac{\alpha}{2} - \overline{AQ} = \left(a-b\right)\cos\frac{\alpha}{2}.$

Analogno dobijemo: $\overline{DQ} = b\sin\frac{\alpha}{2}$ i $\overline{MQ} = \left(a-b\right)\sin\frac{\alpha}{2}.$

Tražena površina je: $P = \left(a-b\right)\cos\frac{\alpha}{2} \cdot \left(a-b\right)\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\left(a-b\right)^2 \sin\alpha.$



3. Pretpostavimo da tačka $M(x,y)$ na pravoj $y=x-3$ ima traženu osobinu. To znači da je $\sphericalangle AMC = \sphericalangle BMC.$ Pošto su tačke A,B,C kolinearne sa poretkom $A-C-B,$ to znači da je prava MC simetrala ugla $\sphericalangle AMB$ u trouglu ABM. Prema poznatoj osobini simetrale unutrašnjeg ugla u trouglu slijedi:

$\overline{AC}:\overline{BC}=\overline{AM}:\overline{MB}$, tj. $\frac{15}{2}:3=\sqrt{\left(x+\frac{17}{2}\right)^2+y^2}:\sqrt{(x-2)^2+y^2}.$

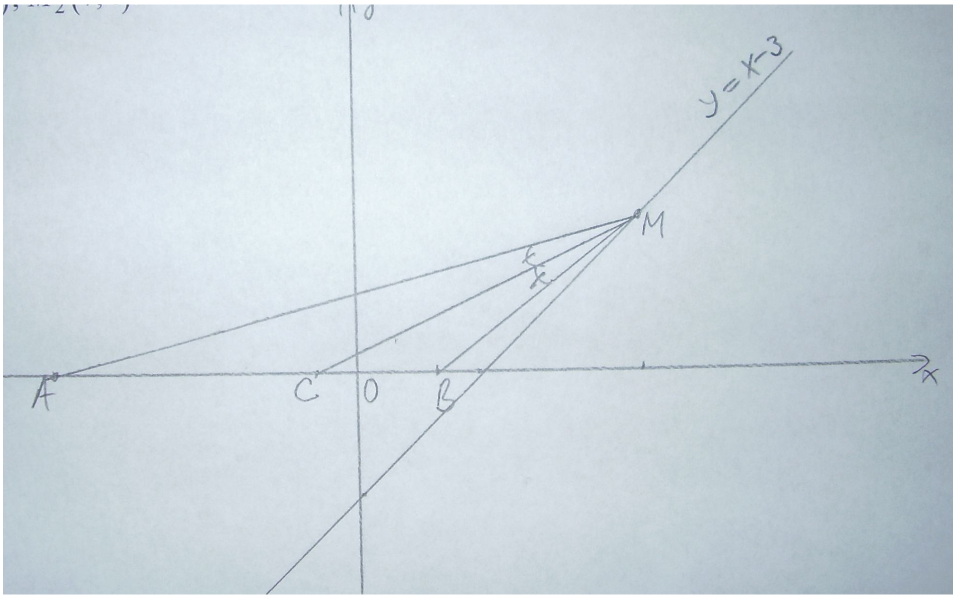
Rješavanjem proporcije slijedi:

$$\frac{15}{2}\sqrt{(x-2)^2+y^2}=3\sqrt{\left(x+\frac{17}{2}\right)^2+y^2}\Rightarrow 225\left[(x-2)^2+y^2\right]=36\left[\left(x+\frac{17}{2}\right)^2+y^2\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 189y^2=-189x^2+1512x+1701\Rightarrow y^2=-x^2+8x+9.$$

Time imamo sistem jednačina $\begin{cases} y=x-3 \\ y^2=-x^2+8x+9 \end{cases}.$

Rješavanjem ovog sistema dobijemo rješenja – dvije tačke zadovoljavaju uslove zadatka, a to su $M_1(0,-3)$, $M_2(7,4)$.



4. Očito se data kocka može podijeliti na 27 kocki ivice 1m. Pošto je $136 = 27 \cdot 5 + 1$, zaključujemo da mora postojati kocka ivice 1 m u kojoj se u svakom trenutku nalazi bar 6 muha. Ako toj kocki opišemo sferu, njen poluprečnik je $R = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{m} \approx 0{,}867\mathrm{m} < 0{,}9\mathrm{m} = 9\,\mathrm{dm}$ (jer je dužina prostorne dijagonale kocke $\sqrt{3}\,\mathrm{m}$).

KANTONALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE
IV RAZRED
Srednjobosanski kanton, školska 2013/14. godina

1. Izračunati *x* ako u binomnom razvoju $\left(\frac{\sqrt{2^x}}{\sqrt[16]{8}}+\frac{\sqrt[16]{32}}{\sqrt{2^x}}\right)^8$ dobijemo 56 kad oduzmemo šesti od četvrtog člana (sabirka).
2. Riješiti jednačinu $z^6-\sqrt{2}z^3+1=0$ u skupu kompleksnih brojeva.
3. Dat je jednakokraki trougao ABC u kome je $\sphericalangle ACB=120^0$ i neka je a dužina kraka trougla ABC. Neka je M_1 središte stranice AC i N_1 središte stranice BC. Upišimo u ΔABC pravougaonik tako da jedna njegova stranica leži na duži AB, a suprotna stranica je $\overline{M_1N_1}$. Neka je M_2 središte duži M_1C i N_2 središte duži N_1C. Upišimo u ΔM_1N_1C pravougaonik tako da jedna njegova stranica leži na duži $\overline{M_1N_1}$, a suprotna stranica je $\overline{M_2N_2}$. Nastavljamo ovaj proces tako da dobijamo pravougaonike čije su gornje stranice $\overline{M_3N_3},\overline{M_4N_4},\ldots,\overline{M_nN_n},\ldots$ Izračunati zbir površina svih pravougaonika.
4. Dokazati da je broj $\underbrace{111...1}_{2n \text{ cifara}}-\underbrace{222...2}_{n \text{cifara}}$ kvadrat cijelog broja za svaki prirodni broj *n*.

Zabranjena upotreba kalkulatora.

SRETNO!

Rješenja zadataka za IV razred

1. Šesti član u razvoju binoma $\left(\frac{\sqrt{2^x}}{\sqrt[16]{8}}+\frac{\sqrt[16]{32}}{\sqrt{2^x}}\right)^8$ je

$$T_6=\binom{8}{5}\left(\frac{\sqrt{2^x}}{\sqrt[16]{8}}\right)^3\cdot\left(\frac{\sqrt[16]{32}}{\sqrt{2^x}}\right)^5=56\cdot\left(2^{\frac{x}{2}-\frac{3}{16}}\right)^3\cdot\left(2^{\frac{5}{16}-\frac{x}{2}}\right)^5=56\cdot 2^{-x+1},$$

dok je četvrti član

$$T_4=\binom{8}{3}\left(\frac{\sqrt{2^x}}{\sqrt[16]{8}}\right)^5\cdot\left(\frac{\sqrt[16]{32}}{\sqrt{2^x}}\right)^3=56\cdot\left(2^{\frac{x}{2}-\frac{3}{16}}\right)^5\cdot\left(2^{\frac{5}{16}-\frac{x}{2}}\right)^3=56\cdot 2^x.$$ Dakle,

$$T_4-T_6=56\Leftrightarrow 2^x-2^{-x+1}=1\Leftrightarrow\left(2^x\right)^2-2=2^x.$$

Ako je $2^x=t,$ tada je $t^2-t-2=0\Rightarrow t=2$ ili $t=-1.$

Očito je $t>0\Rightarrow t=2\Rightarrow 2^x=2\Rightarrow x=1.$

2. Uzmimo smjenu $z^3=t.$ Tada je $t^2-\sqrt{2}t+1=0\Rightarrow t_{1,2}=\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{2-4}}{2}=\frac{\sqrt{2}\pm i\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1\pm i\right).$

Vraćanjem smjene dobijemo dvije jednačine po *z*: $z^3=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+i\right)$ i $z^3=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1-i\right).$

Pošto $1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\Rightarrow z^3=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4},$ iz prve jednačine dobijemo tri rješenja

$z_{1,2,3}=\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}\left(k=0,1,2\right).$ Otuda je

$$z_1=\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4};$$

$$z_2=\cos\frac{9\pi}{12}+i\sin\frac{9\pi}{12}=\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-1+i\right);$$

$$z_3=\cos\frac{17\pi}{12}+i\sin\frac{17\pi}{12}=-\cos\frac{5\pi}{12}-i\sin\frac{5\pi}{12}=-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}-i\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$
$$=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}-i\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4};$$

Preostala tri rješenja polazne jednačine dobićemo rješavanjem jednačine

$$z^3=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4},$$ tj.

$$z_{4,5,6}=\sqrt[3]{\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}}=\cos\frac{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}+i\sin\frac{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3},\ k=0,1,2.$$

$$z_4=\cos\frac{\pi}{12}-i\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+i\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4};$$

$$z_5=\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}=-\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}+i\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4};$$

$$z_6=\cos\frac{15\pi}{12}+i\sin\frac{15\pi}{12}=\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i).$$

3. Označimo sa $y_1, y_2, \ldots$ visine pravougaonika. Ako su $R_1, S_1, R_2, S_2, \ldots$ preostali vrhovi pravougaonika (kao na slici) i ako je $x_1=\overline{AR_1}, x_i=\overline{M_{i-1}R_i}\ (i>1)$, tada se lako dobije:

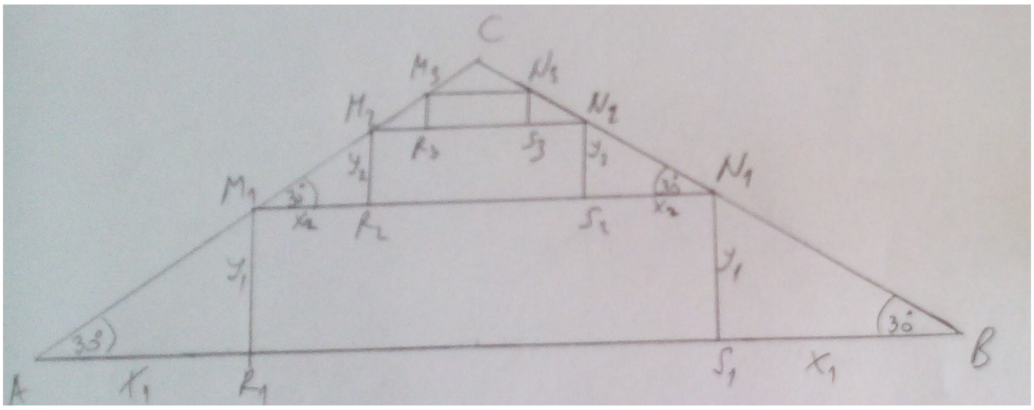
$$x_1=\frac{a}{2}\cos 30^0=\frac{a\sqrt{3}}{4},\ y_1=\frac{a}{2}\sin 30^0=\frac{a}{4}, \overline{M_1N_1}=\frac{a\sqrt{3}}{2},$$

$$x_2=\frac{a\sqrt{3}}{8},\ y_2=\frac{a}{8}, \overline{M_2N_2}=\frac{a\sqrt{3}}{4},\ldots$$

Površine pravougaonika su:

$$P_1=\frac{a^2\sqrt{3}}{8}, P_2=\frac{a^2\sqrt{3}}{32}, P_3=\frac{a^2\sqrt{3}}{128},\ldots$$ dok je tražena suma:

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{8}+\frac{a^2\sqrt{3}}{32}+\frac{a^2\sqrt{3}}{128}+\ldots=\frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{8}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{a^2\sqrt{3}}{6}.$$



4. Neka je $x = \underbrace{111...1}_{n \text{ cifara}}$. Tada je

$$\underbrace{111...1}_{2n \text{ cifara}} - \underbrace{222...2}_{n \text{cifara}} = x \cdot 10^n + x - 2x = x \cdot 10^n - x = x\left(10^n - 1\right) = x \cdot \underbrace{999...9}_{n \text{cifara}} = x \cdot 9x = 9x^2 = \left(3x\right)^2.$$